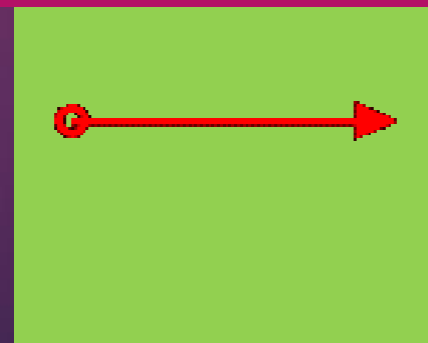
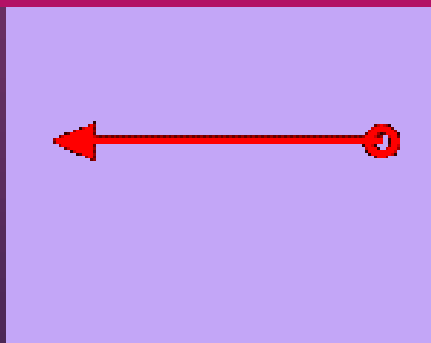
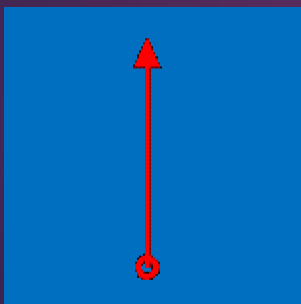


Definiciones y operaciones con vectores.



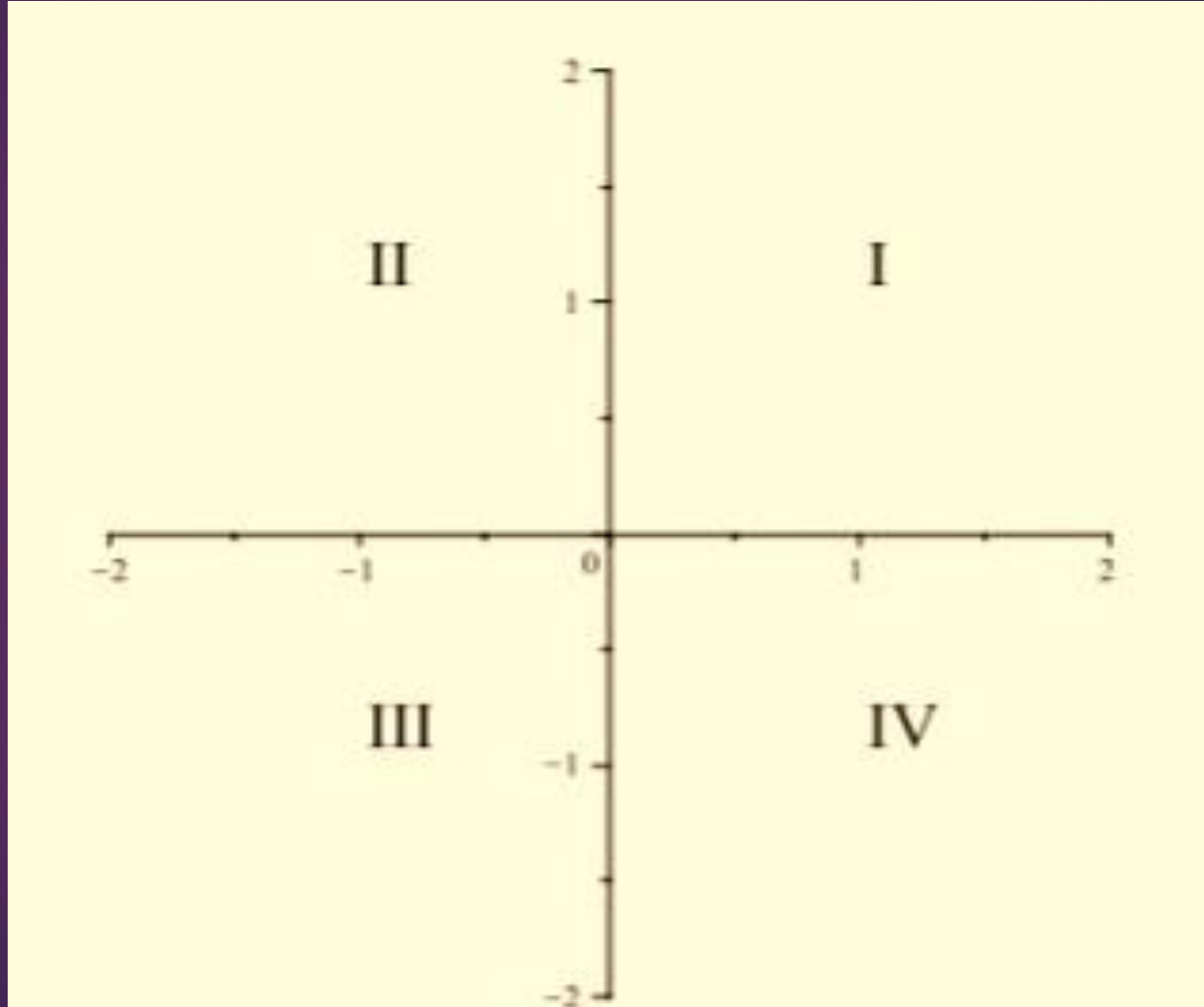
SISTEMAS DE COORDENADAS

SISTEMAS UNIDIMENSIONAL DE COORDENADAS

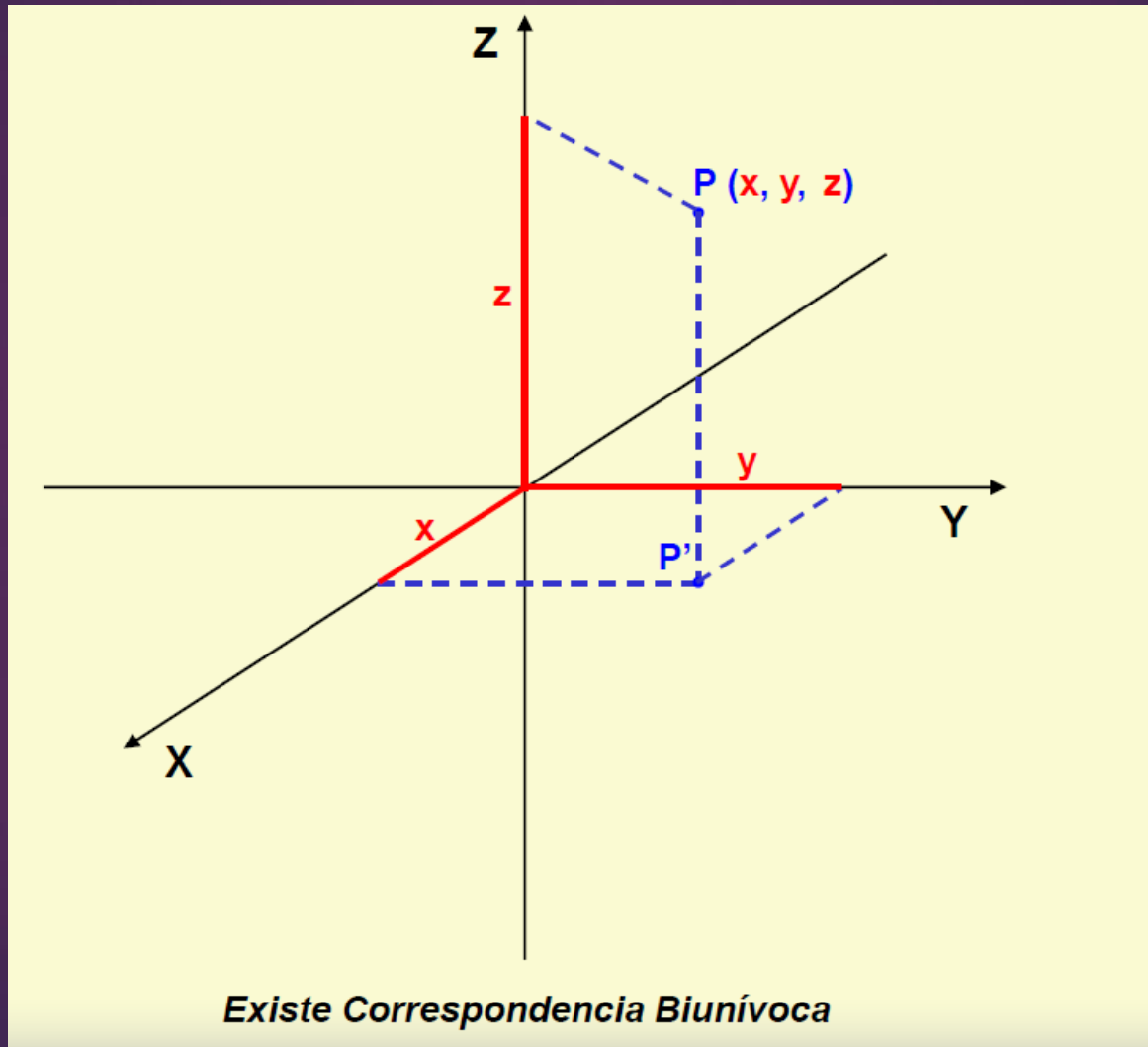


- **Origen**
- **Direccion**
- **Unidad**

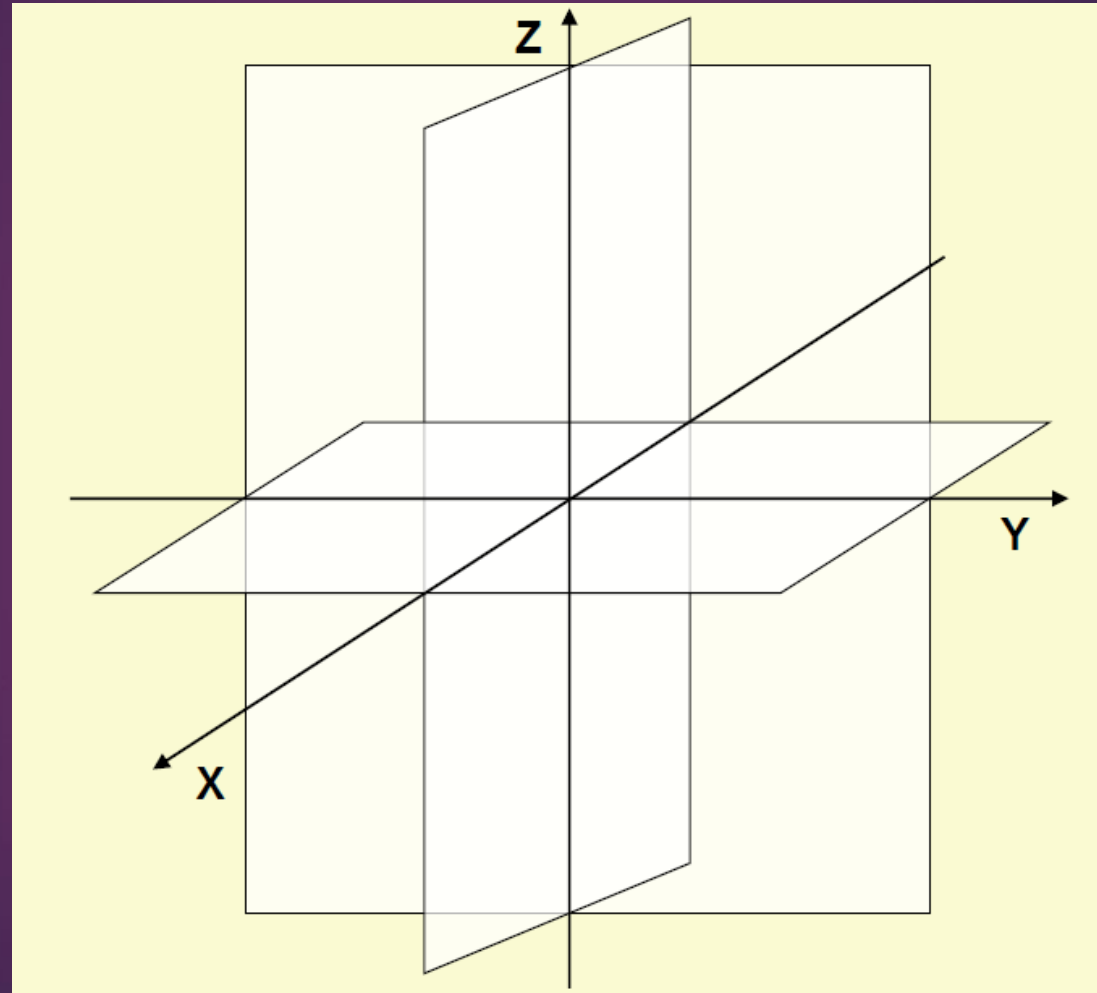
SISTEMAS BIDIMENSIONAL DE COORDENADAS

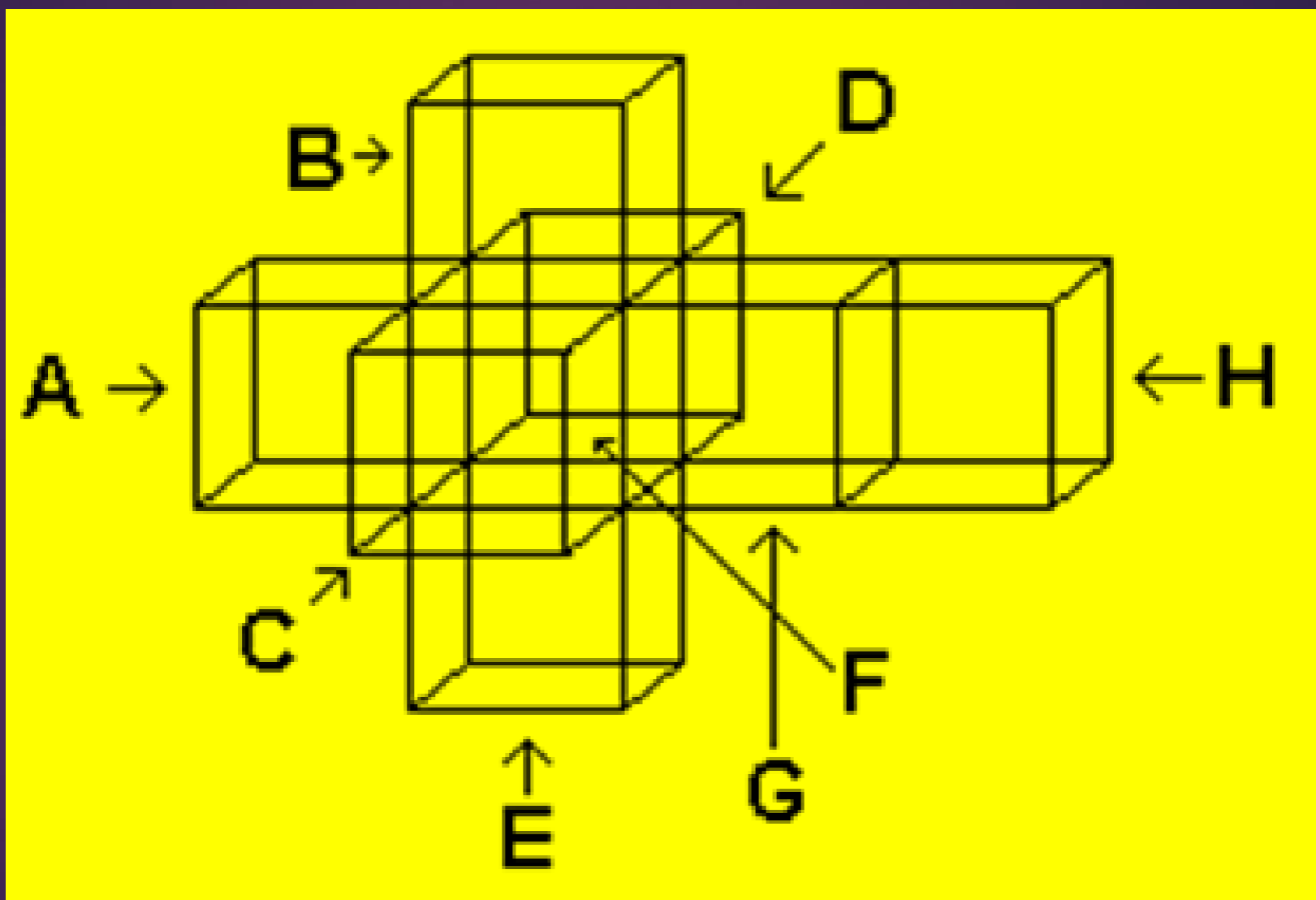


SISTEMAS TRIDIMENSIONAL DE COORDENADAS

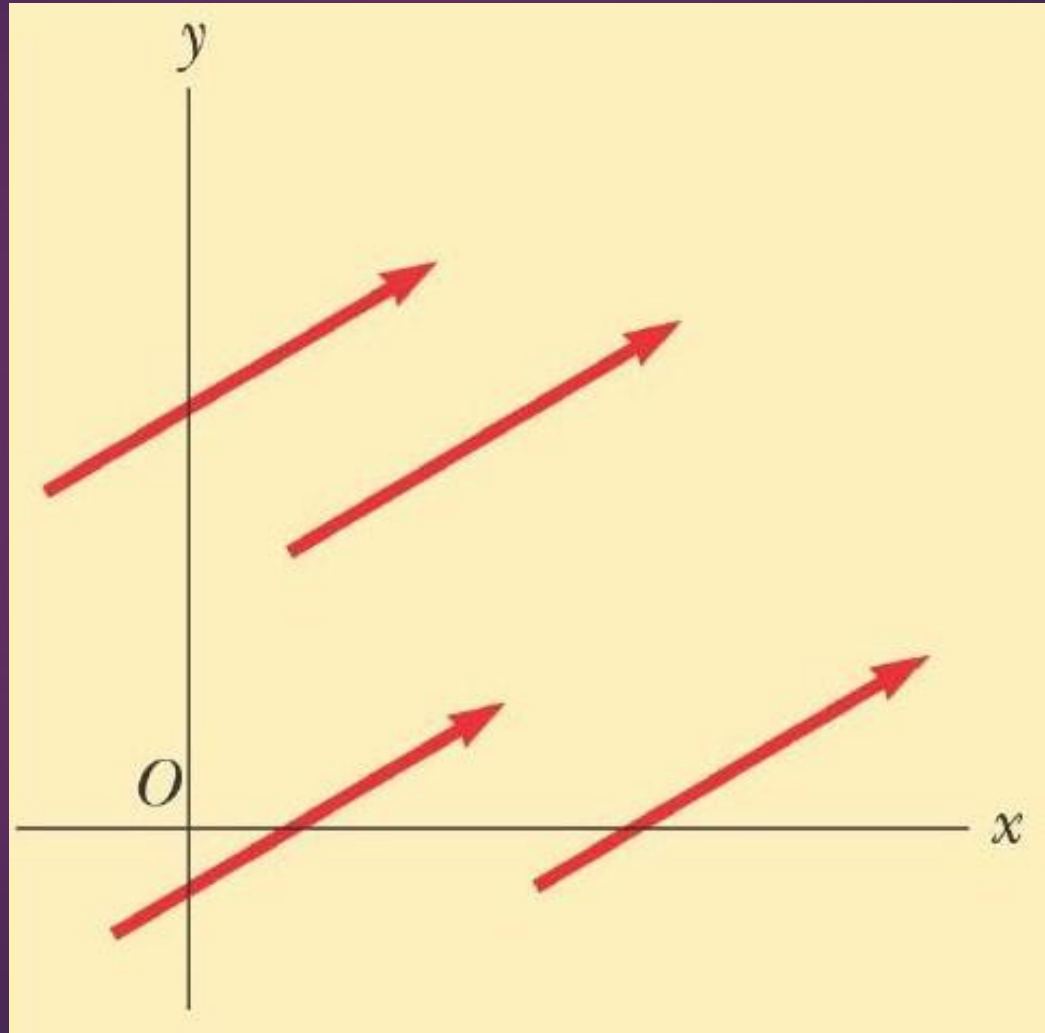


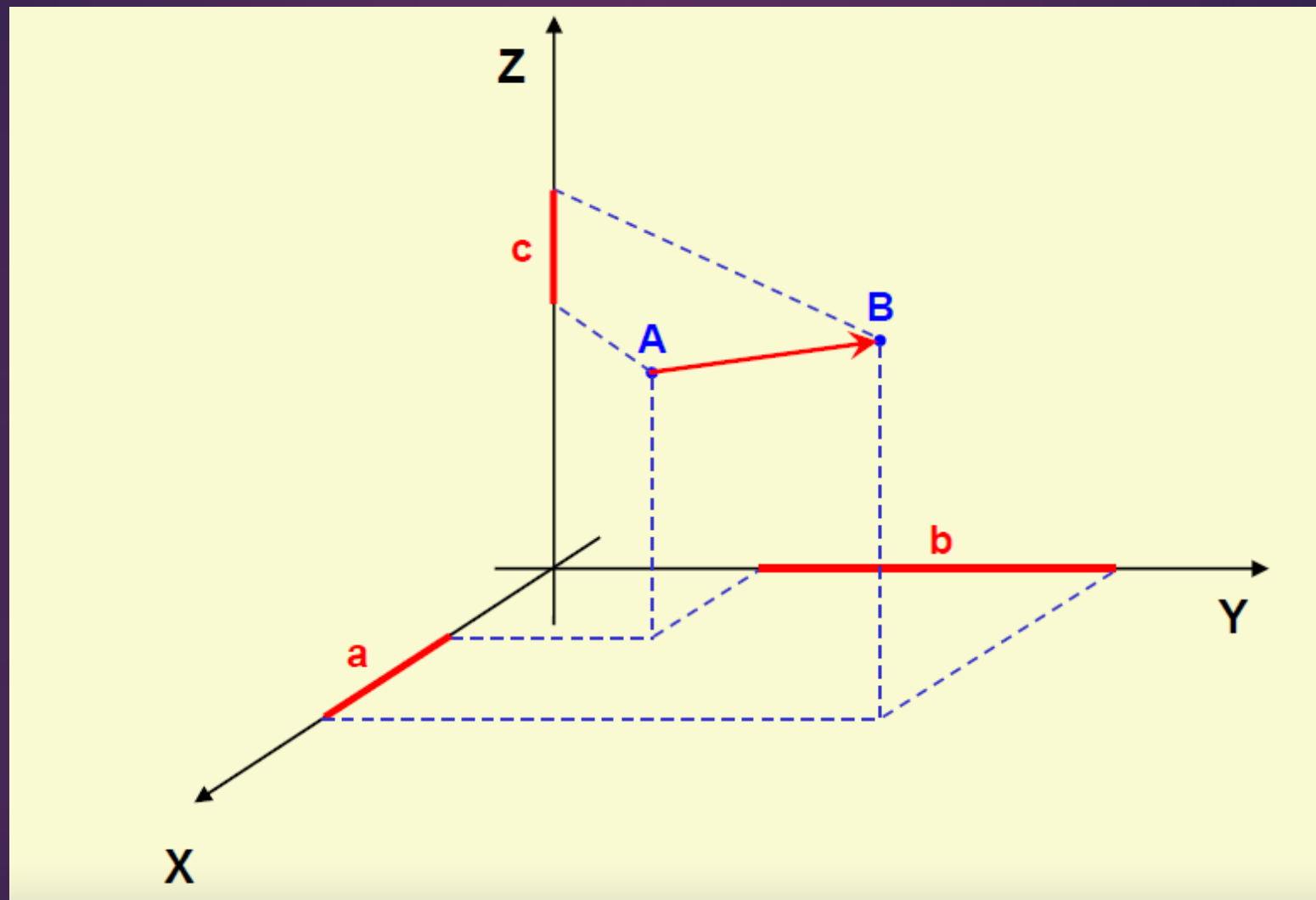
SISTEMAS TRIDIMENSIONAL DE COORDENADAS





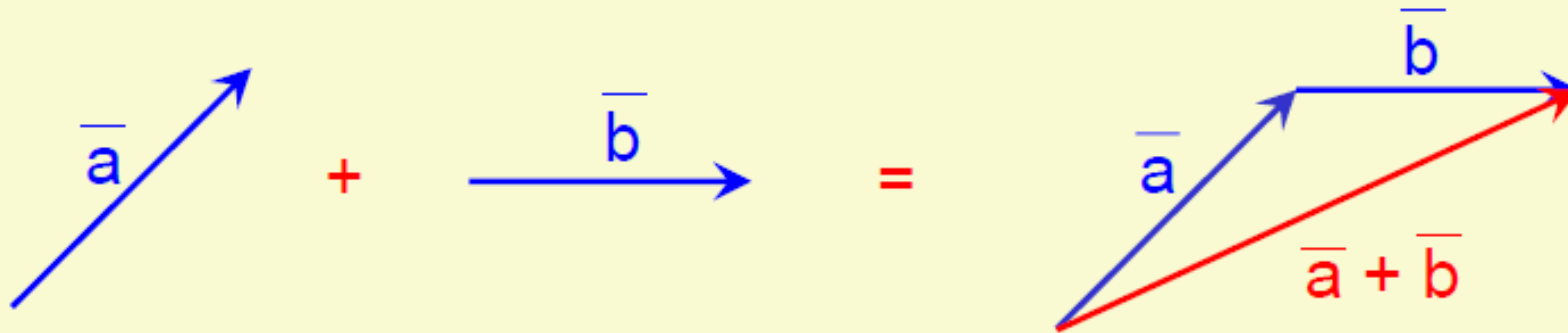
Representación geométrica de vectores en \mathbb{R}^2

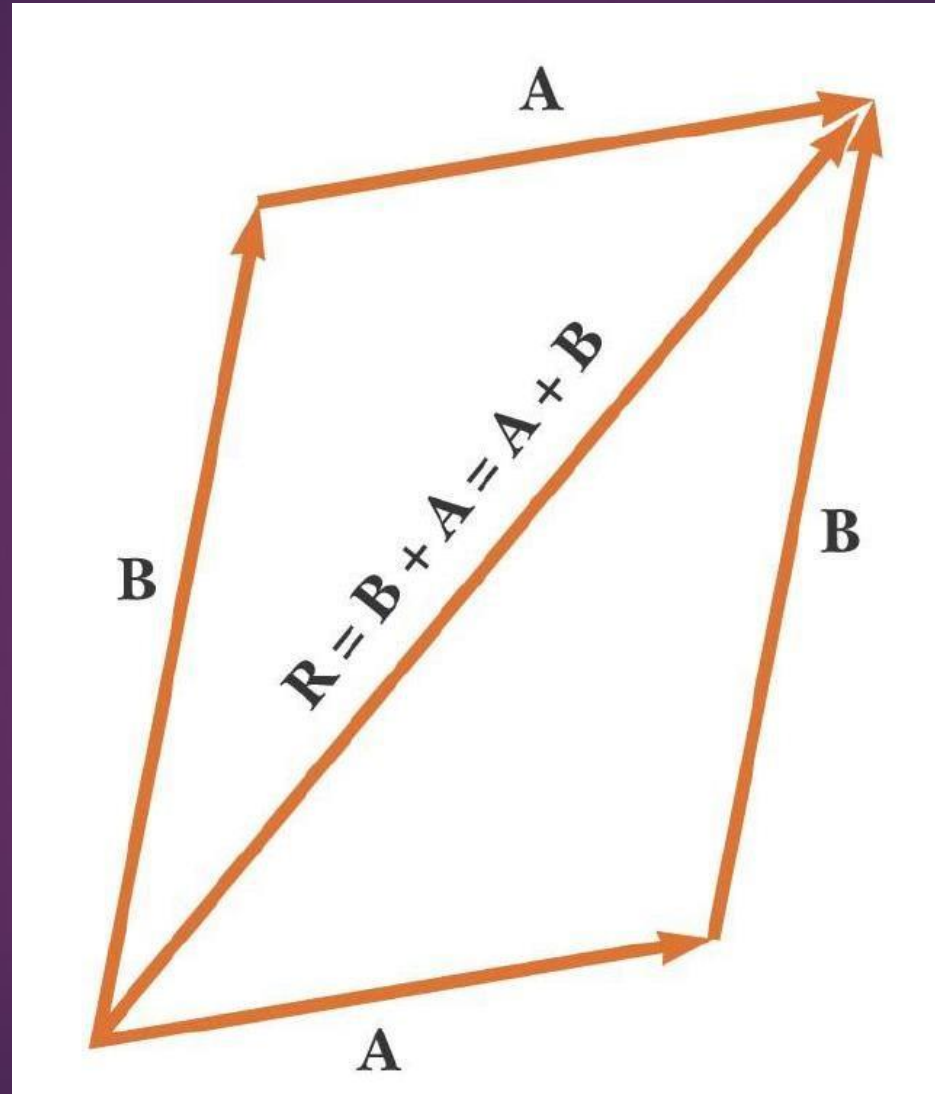


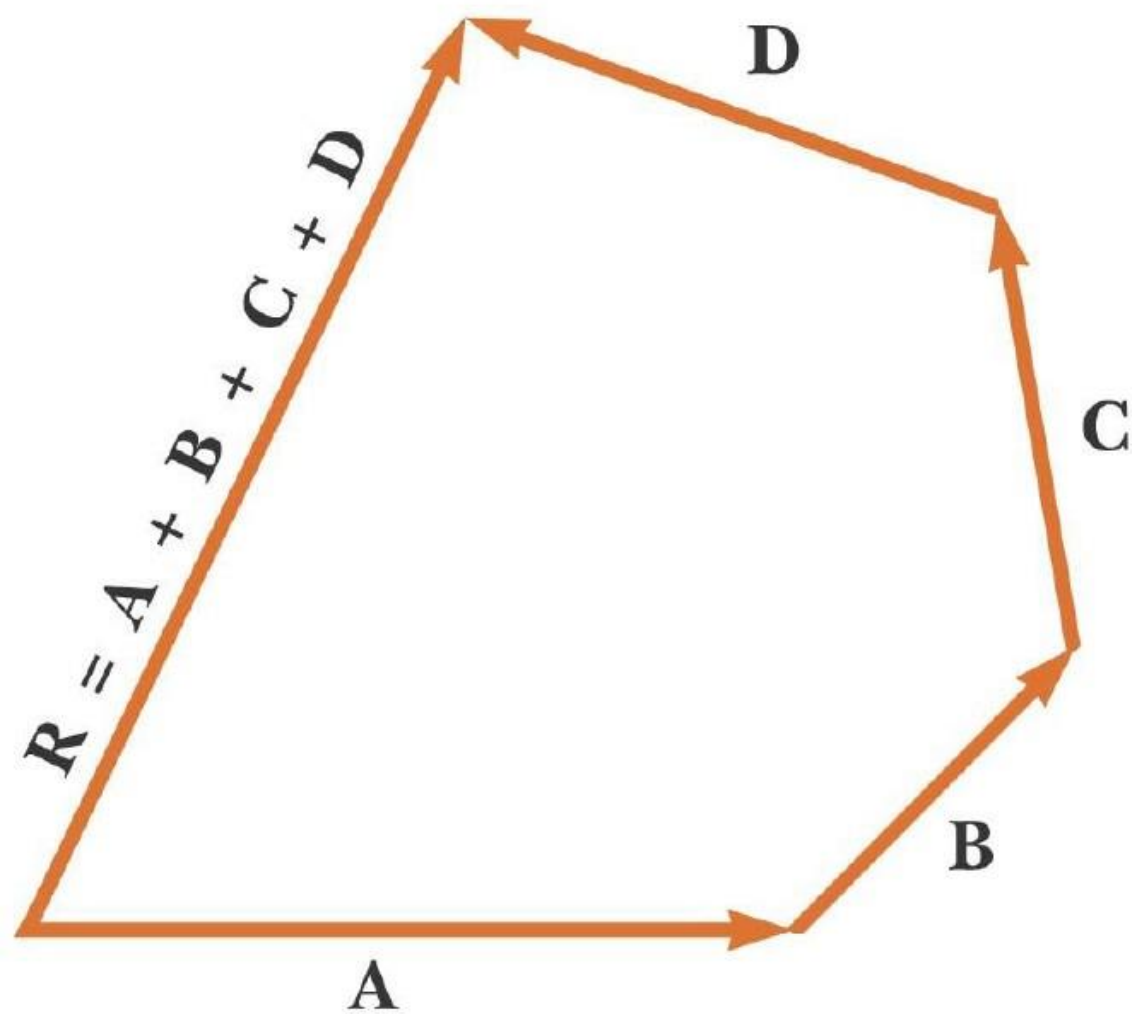


OPERACIONES CON VECTORES

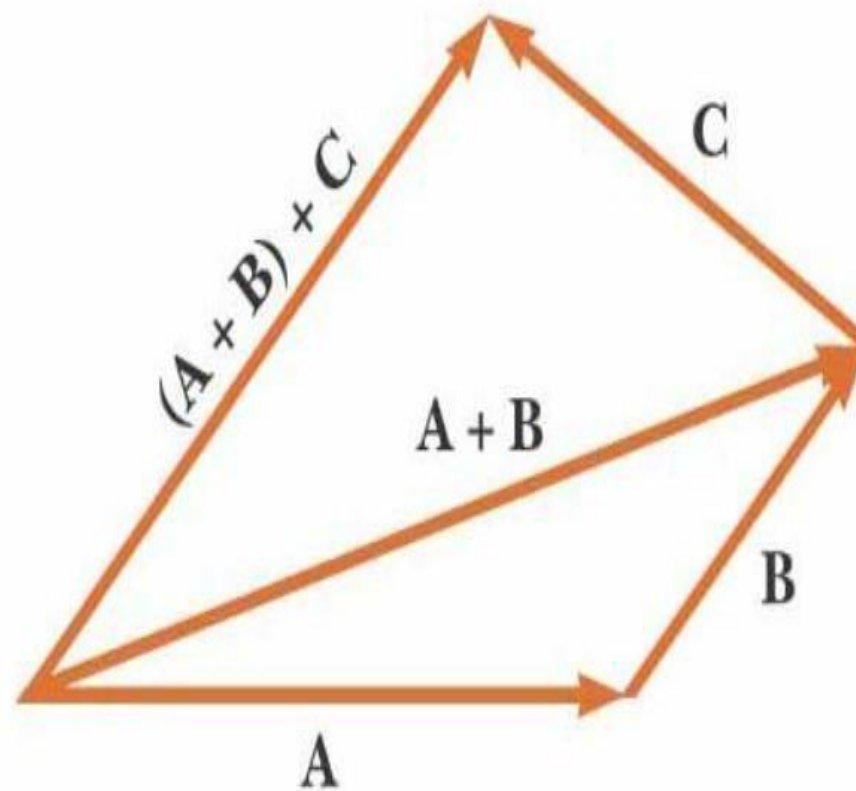
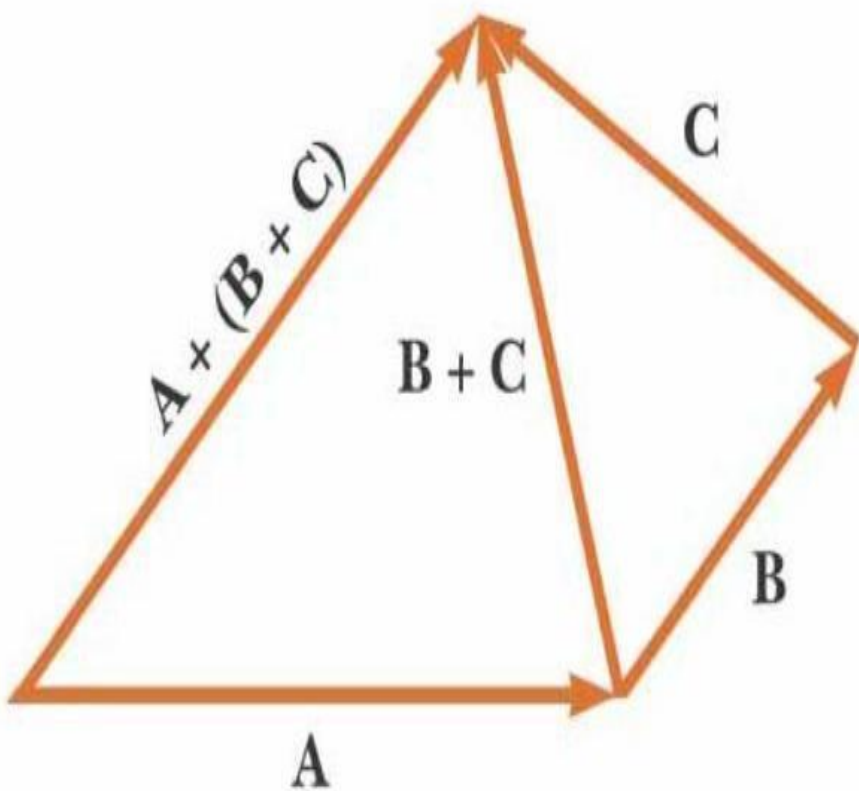
Geométricamente la suma de vectores se realiza como sigue:



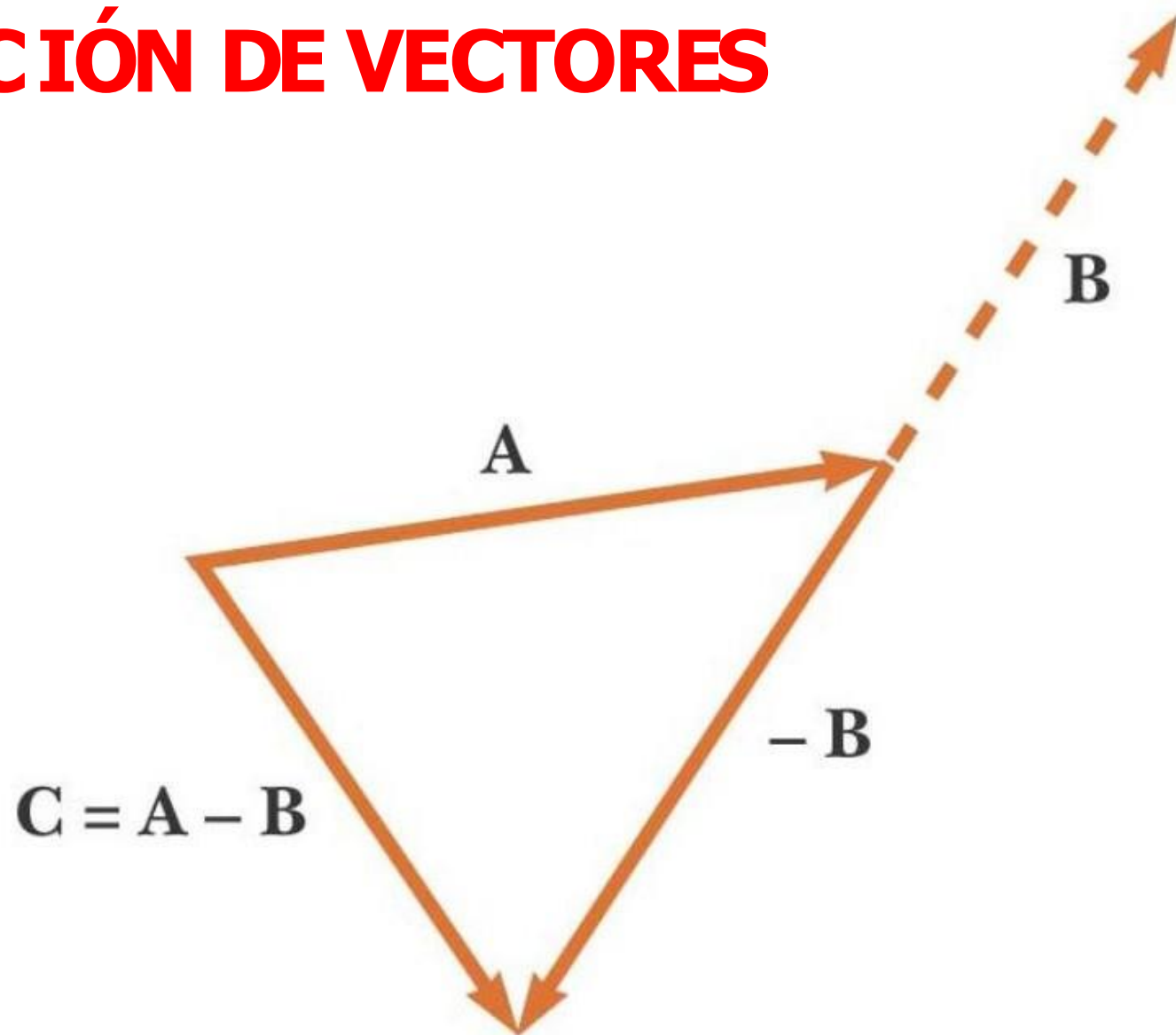




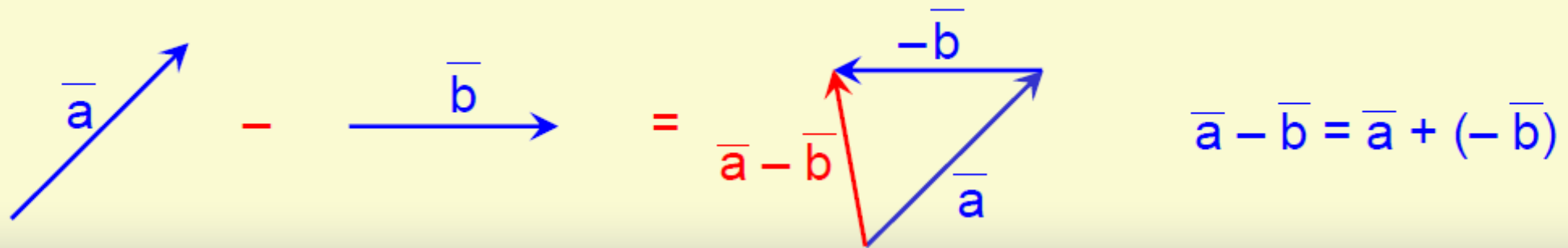
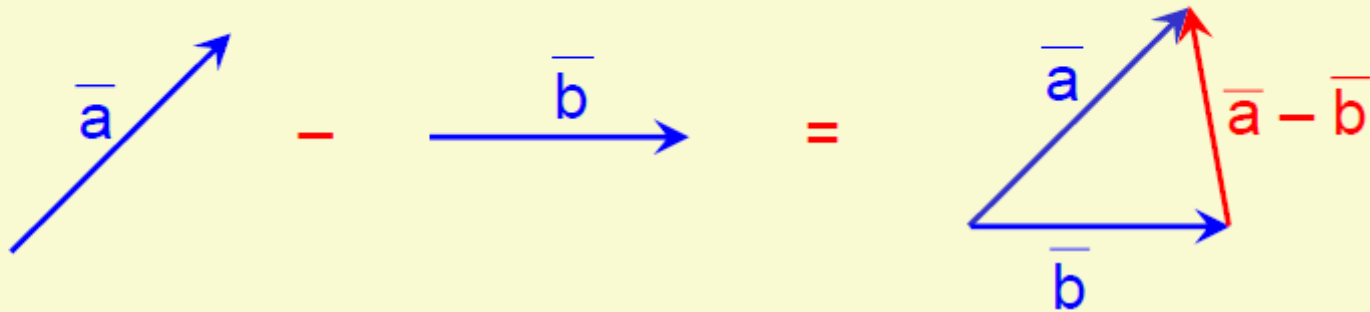
Propiedad Asociativa de la Suma $(A + B) + C = A + (B + C)$



SUSTRACCIÓN DE VECTORES



Geométricamente la sustracción de vectores se puede realizar de dos formas



PARALELISMO Y ORTOGONALIDAD DE VECTORES

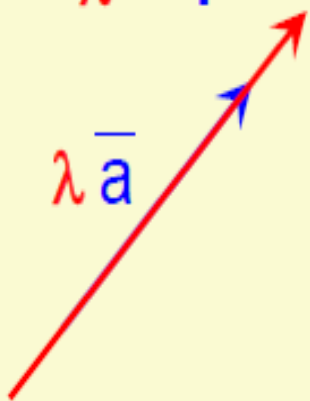
Def.-Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ decimos que dichos vectores son paralelos y se $a \parallel b$ si $a = rb$ (o $b = sa$) donde r y s son reales

i) Si r es positivo los vectores tienen la misma dirección

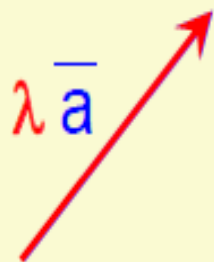
ii) Si r es negativo los vectores tienen direcciones opuestas

Obs.-El vector cero 0 es paralelo a todo vector

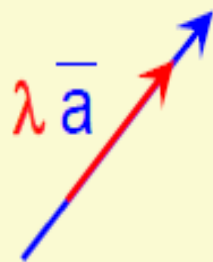
$$\lambda > 1$$



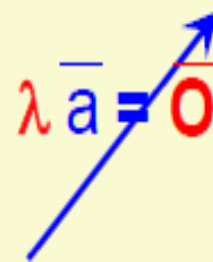
$$\lambda = 1$$



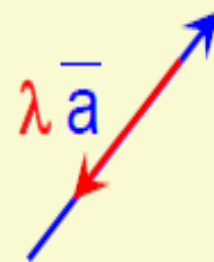
$$0 < \lambda < 1$$



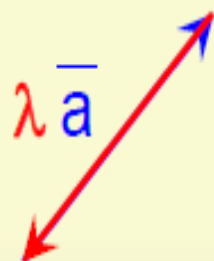
$$\lambda = 0$$



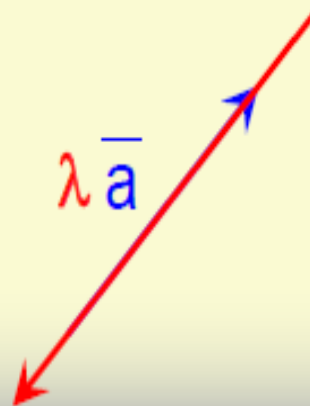
$$0 > \lambda > -1$$



$$\lambda = -1$$

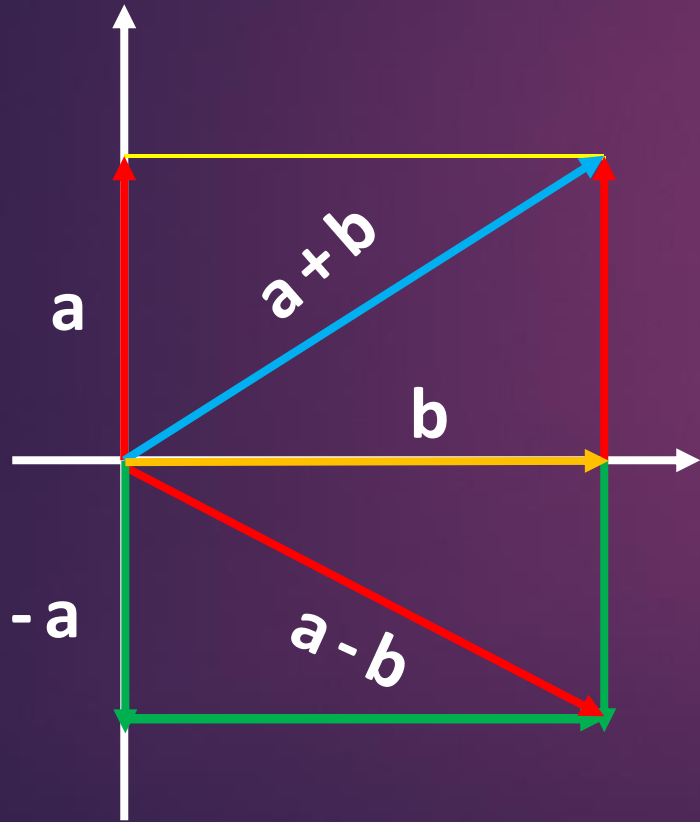


$$\lambda < -1$$



ORTOGONALIDAD DE VECTORES

Sean a y b vectores de \mathbb{R}^n , decimos que los vectores son ortogonales y denotamos a $a \perp b \iff |a + b| = |a - b|$, es decir:



$$|a + b|^2 = |a - b|^2$$

$$|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$$

$$4a \cdot b = 0$$



$$a \perp b \iff a \cdot b = 0$$

$$|\bar{a}| = \|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

MAGNITUD, LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR.

Norma de un vector. Dado el vector \bar{a} de R^n , se define su norma como el número:

$$|\bar{a}| = \|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

- **A la norma también se le denomina modulo, magnitud o longitud del vector.**

MAGNITUD, LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR.

Norma de un vector. Dado el vector a de R^n , se define su norma como el número:

$$|\vec{a}| = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

- **A la norma también se le denomina modulo, magnitud o longitud del vector.**

Propiedades fundamentales

$$\text{i)} \quad |\bar{a}| \geq 0; \quad |\bar{a}| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$$

$$\text{ii)} \quad |r\bar{a}| = |r| |\bar{a}|, \text{ donde } r \in \mathbb{R}$$

$$\text{iii)} \quad \langle \bar{a}; \bar{a} \rangle = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$$

$$\text{iv)} \quad |\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}| \text{ (desigualdad triangular)}$$

$$\text{v)} \quad |\bar{a} \pm \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \pm 2\bar{a} \cdot \bar{b}$$

Demostraciones:

i) Como $a_i^2 \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$; entonces $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \geq 0 \Rightarrow |\bar{a}| \geq 0$

Ahora $|\bar{a}| = 0 \Leftrightarrow |\bar{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \Leftrightarrow a_i^2 = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

$$\text{iii) } \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = \bar{a} \cdot \bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right]^2 = |\bar{a}|^2$$

$$\begin{aligned} \text{v) } |\bar{a} \pm \bar{b}|^2 &= (\bar{a} \pm \bar{b}) \cdot (\bar{a} \pm \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} \pm \bar{a} \cdot \bar{b} \pm \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \pm \bar{a} \cdot \bar{b} \pm \bar{b} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \pm 2\bar{a} \cdot \bar{b} \\ &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \pm 2\bar{a} \cdot \bar{b} \end{aligned}$$

Comentarios. En la desigualdad triangular, la igualdad ocurre si uno de los vectores es múltiplo escalar del otro.

Desigualdad de Cauchy – Schwarz.

Si a y b son vectores de \mathbb{R}^n tenemos:

$$(a \cdot b)^2 \leq (a \cdot a)(b \cdot b)$$

Demostración

La desigualdad es trivial si a o b es el vector cero.

Supongamos que los vectores a y b son no nulos. Sea el vector $C = xa - yb$, donde $x = b \cdot b$ y $y = a \cdot b$

Sabemos que $C \cdot C \geq 0$, luego reemplazando:

$C \cdot C = (xa - yb) \cdot (xa - yb)$ de donde resulta:

$$(b \cdot b)^2 (a \cdot a) - (a \cdot b)^2 (b \cdot b) + (a \cdot b)^2 (b \cdot b) \geq 0$$

Pero como $b \cdot b \geq 0$ puesto que b es no nulo; dividiendo entre $b \cdot b$ resulta:

$$(b \cdot b)(a \cdot b) - (a \cdot b)^2 \geq 0$$

Desigualdad de Cauchy - Schwarz. Dados \bar{a} y $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ se tiene: $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| |\bar{b}|$

Comentario. La igualdad ocurre si uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro.

VECTOR UNITARIO.

Normalización de un vector (vector unitario). Dado un vector no nulo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, asociado a él se construye un vector de modulo 1, denominado vector unitario, de modo que:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Consecuencias:

a) Según lo anterior, se tiene que un vector no nulo se puede expresar en términos de su vector unitario, del siguiente modo:

$$\overline{u} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \Rightarrow \overline{a} = |\overline{a}| \overline{u}$$

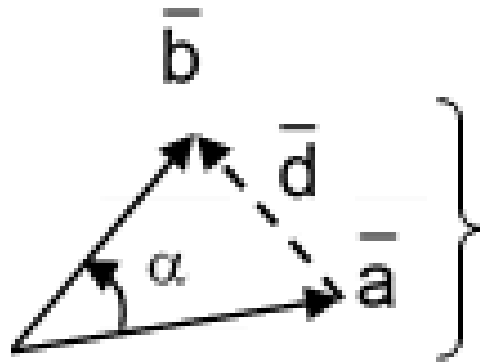
b) **Vectores unitarios notables.** Son aquellos que se emplean en la construcción de las bases canónicas de los espacios vectoriales R^n ; tales como:

i) Base canónica de R^2 : $\{\bar{i}; \bar{j}\}$ donde $\bar{i} = (1, 0)$ $\bar{j} = (0, 1)$

ii) Base canónica de R^3 : $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; donde $\bar{i} = (1, 0, 0)$ $\bar{j} = (0, 1, 0)$ y $\bar{k} = (0, 0, 1)$

iii) Base canónica de R^n : $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$; donde $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ y $\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$

Ángulo entre vectores. El ángulo α comprendido entre \vec{a} y \vec{b} , se calcula mediante:



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \alpha \in [0; \pi]$$

Demostración de la "definición"

Partimos del producto interno de los vectores dados:

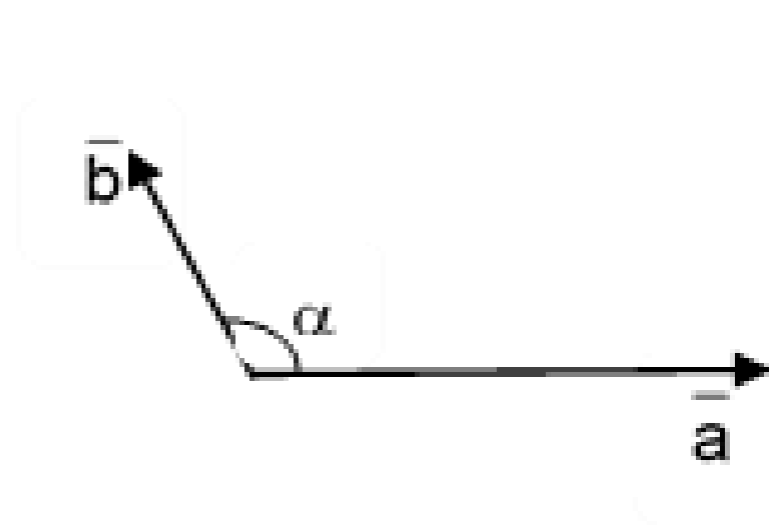
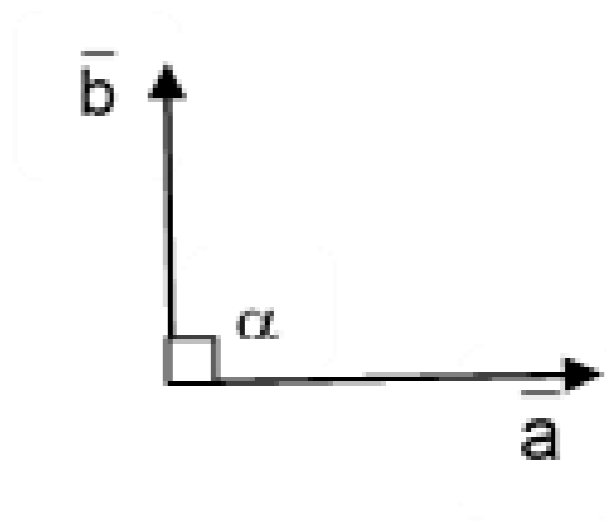
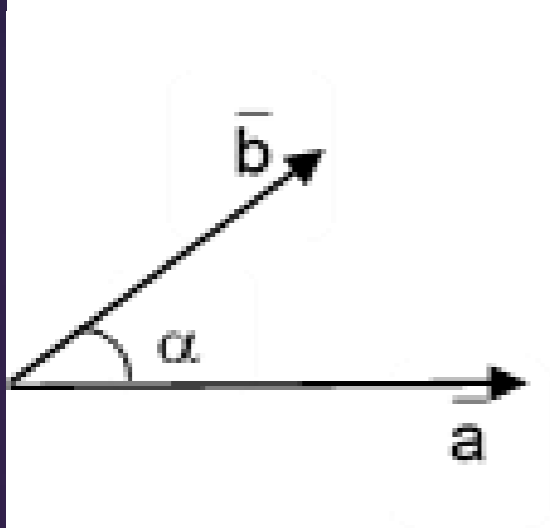
La distancia entre los vectores, según el grafico anterior, viene dada por:

$$|\vec{d}| = |\vec{b} - \vec{a}| \Rightarrow \begin{cases} \text{Ley de cosenos: } |\vec{d}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \dots (1) \\ \text{Por propiedad de norma: } |\vec{d}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) y (2): } 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Comentarios.

a) Se presentan los siguientes casos:



Notamos del primer grafico, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ (ángulo agudo); del segundo: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) y del tercero: $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ (ángulo obtuso).

b) De $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, $\alpha \in [0; \pi]$; se deduce que $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$

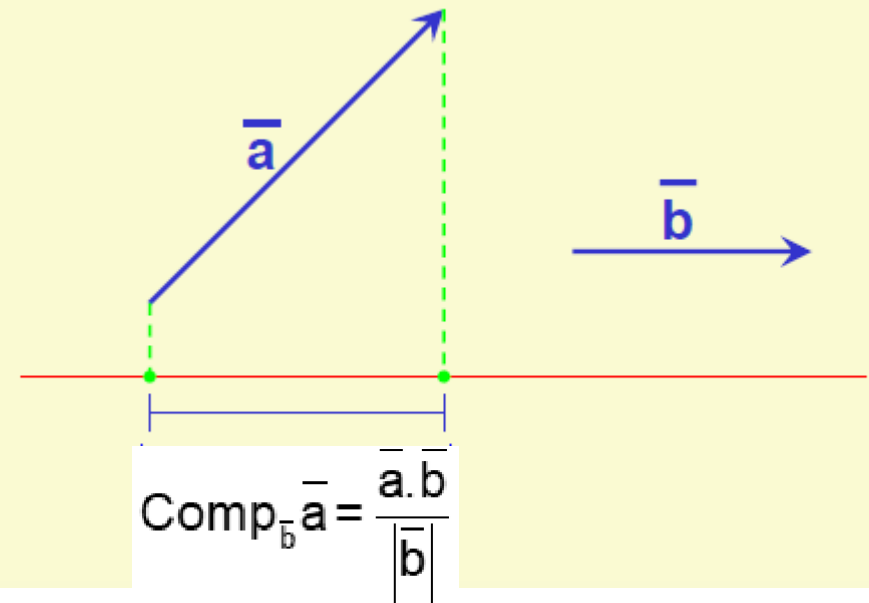
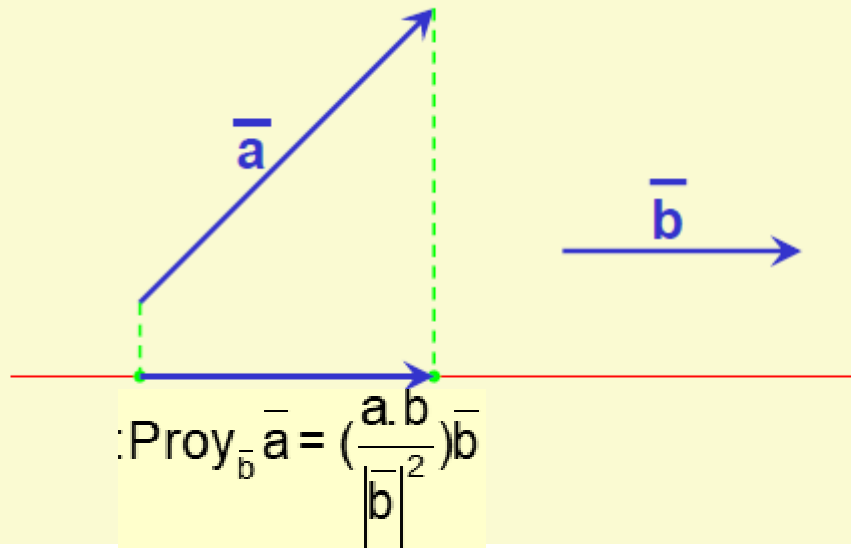
Proyección ortogonal de un vector en una dirección dada.

Definición.

$$\vec{a} - \lambda \vec{b}$$

$$\lambda \vec{b}$$

El vector proyección ortogonal de \vec{a} en la dirección de \vec{b} está dado por: $\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$



Propiedades fundamentales:

i) $\text{Proy}_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = \text{Proy}_{\bar{b}}\bar{a} + \text{Proy}_{\bar{b}}\bar{c}.$

$\text{Comp}_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = \text{Comp}_{\bar{b}}\bar{a} + \text{Comp}_{\bar{b}}\bar{c}.$

ii) $\text{Proy}_{\bar{b}}(r\bar{a}) = r\text{Proy}_{\bar{b}}\bar{a}; r \in R.$

$\text{Comp}_{\bar{b}}r\bar{a} = r\text{Comp}_{\bar{b}}\bar{a}; r \in R$

iii) $\text{Proy}_{r\bar{b}}(\bar{a}) = \text{Proy}_{\bar{b}}\bar{a}; r \in R - \{0\}.$

$\text{Comp}_{r\bar{b}}\bar{a} = \frac{r}{|r|}\text{Comp}_{\bar{b}}\bar{a}, \text{ donde } r \in R - \{0\}$

Demostraciones:

$$\text{i) } \text{Proy}_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = \left[\frac{(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right] \bar{b} = \left[\frac{\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right] \bar{b} = \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \bar{b} + \left(\frac{\bar{c} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \bar{b} = \text{Proy}_{\bar{b}} \bar{a} + \text{Proy}_{\bar{b}} \bar{c}.$$

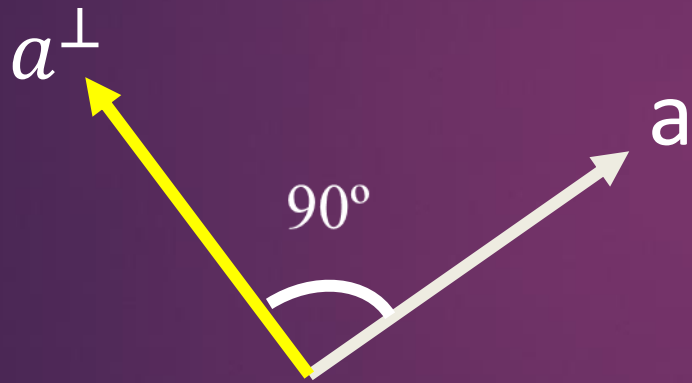
$$\text{Comp}_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = \frac{(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} + \frac{\bar{c} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \text{Comp}_{\bar{b}} \bar{a} + \text{Comp}_{\bar{b}} \bar{c}.$$

$$\text{iii) } \text{Proy}_{r\bar{b}}(\bar{a}) = \left[\frac{\bar{a} \cdot (r\bar{b})}{|r\bar{b}|^2} \right] (r\bar{b}) = \frac{r^2}{|r|^2} \left[\frac{\bar{a} \cdot (\bar{b})}{|\bar{b}|^2} \right] (\bar{b}) = \text{Proy}_{\bar{b}} \bar{a}; r \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\text{Comp}_{r\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot (r\bar{b})}{|r\bar{b}|} = \frac{r}{|r|} \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{r}{|r|} \text{Comp}_{\bar{b}} \bar{a}, \text{ donde } r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

ORTOGONAL DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^2

Dado un vector tal como $a=(a_1, a_2)$ a partir de él se obtiene un vector que se obtiene de haciendo rotar en sentido antihorario 90° , se obtiene $a^\perp=(-a_2, a_1)$, al que se denota el ortogonal del vector a .



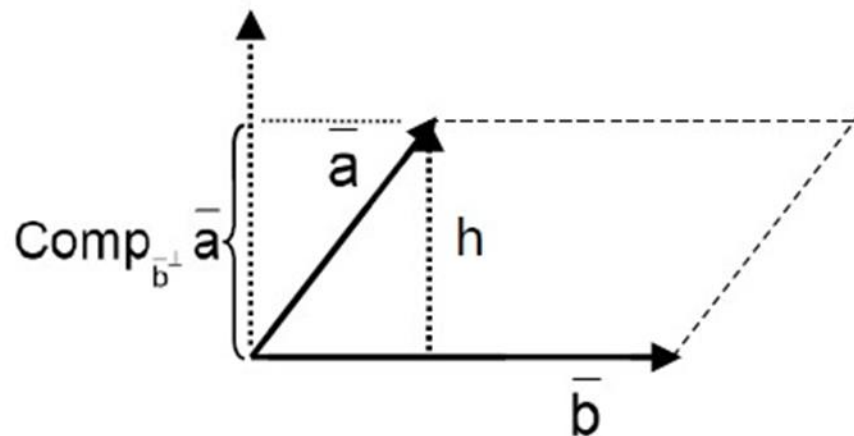
Propiedades

1. $a \cdot a^\perp = 0$
2. $(a^\perp)^\perp = -a$
3. $(a + b)^\perp = a^\perp + b^\perp$

Interpretación geométrica del producto escalar canónico

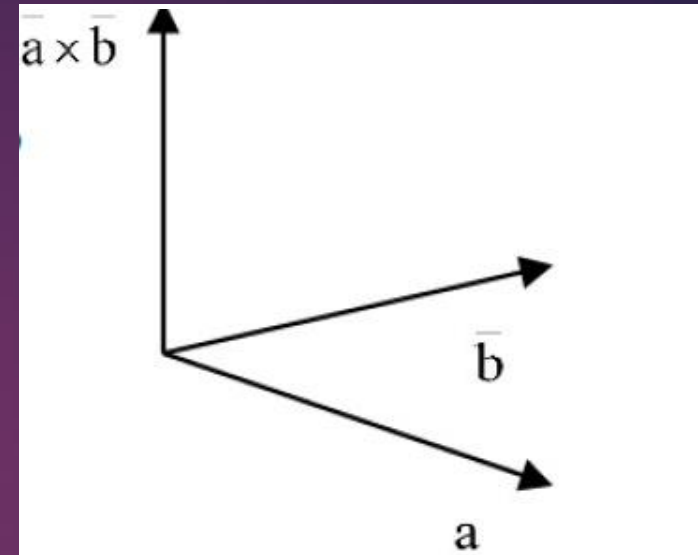
El área de un paralelogramo de lados \vec{a} y \vec{b} está dado por : $\text{Área} = |\vec{a} \cdot \vec{b}^\perp|$ ($= |\vec{a}^\perp \cdot \vec{b}|$)

Demostración:



$$\text{Área} = (\text{Base})(\text{altura}) = |\vec{b}| |\text{Comp}_{\vec{b}^\perp} \vec{a}| = |\vec{b}| \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}^\perp|}{|\vec{b}^\perp|} = |\vec{a} \cdot \vec{b}^\perp|$$

PRODUCTO VECTORIAL



El producto vectorial de dos vectores. Es una operación que va de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ a \mathbb{R}^3 , donde a cada pareja de vectores (\vec{a}, \vec{b}) le asigna un único vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$; que se calcula

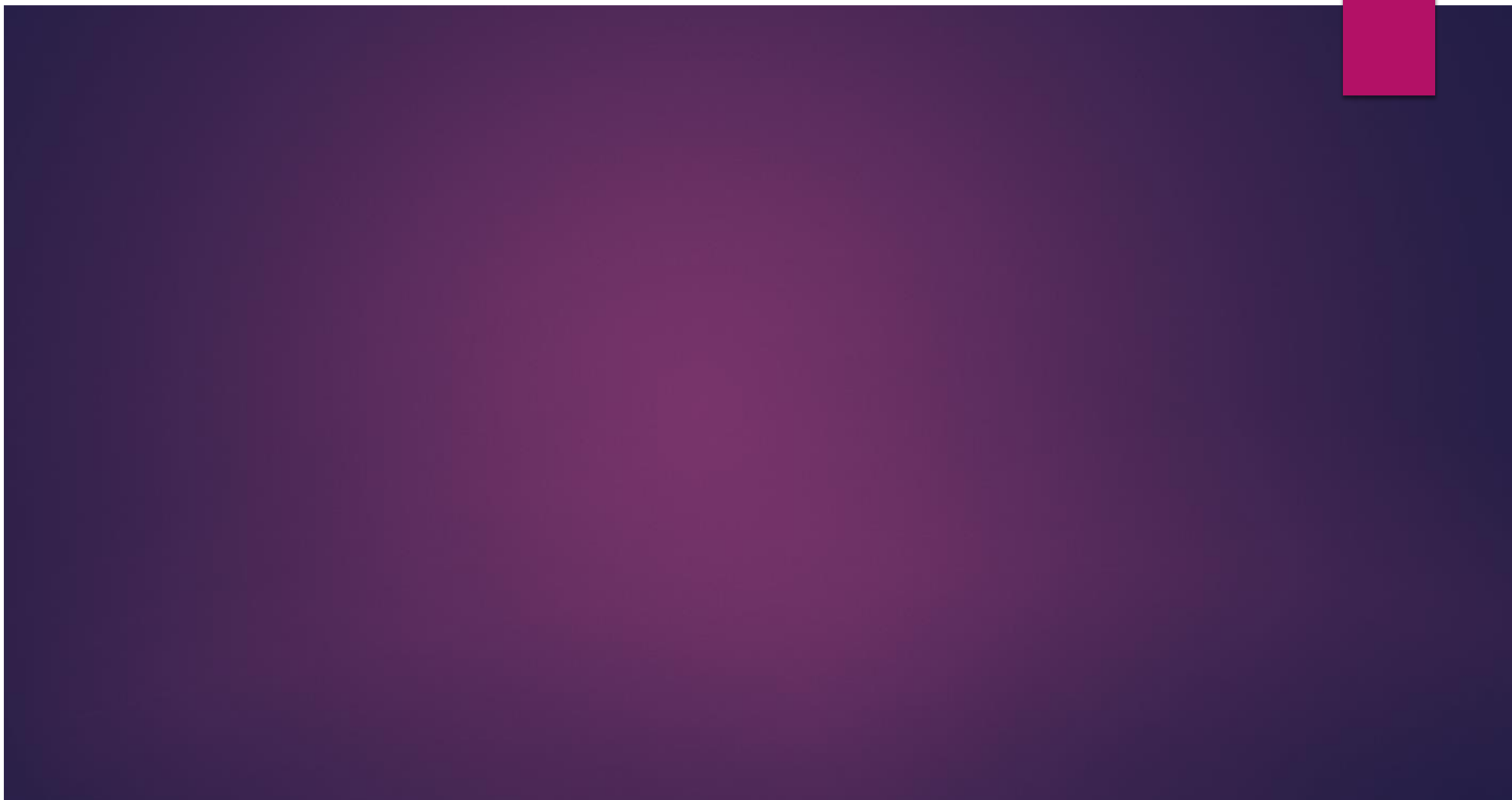
$$\text{mediante : } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Comentarios:

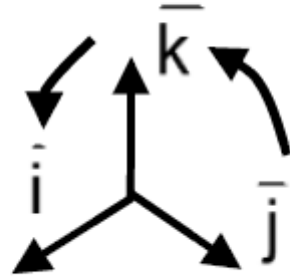
a) Una consecuencia inmediata, recordando la teoría de determinantes, es:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

b) Por otro lado tenemos que $\bar{a} \times \bar{b}$ es perpendicular tanto a \bar{a} como a \bar{b} , y es tal que \bar{a}, \bar{b} y $\bar{a} \times \bar{b}$, en ese orden, forman una triada derecha tal como se muestra en la figura



c) Según lo anterior, se tiene para el caso de los vectores \bar{i}, \bar{j} y \bar{k} :



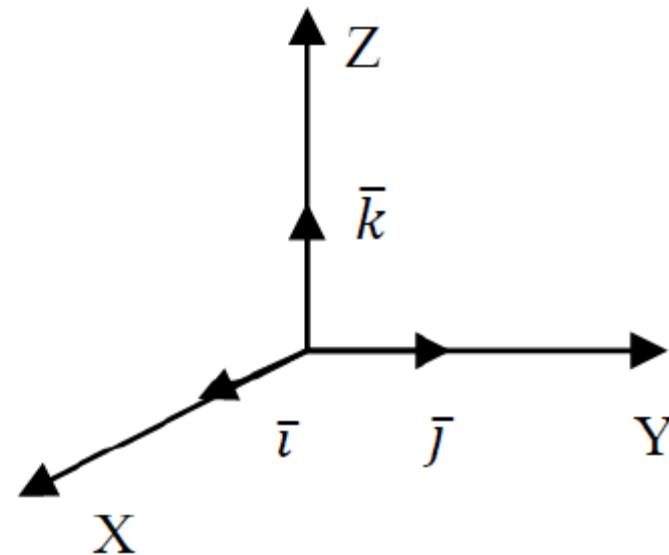
Según las propiedades se tiene

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{o}$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$$



Propiedades fundamentales.

i) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

ii) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

iii) $(r \bar{a}) \times \bar{b} = r(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (r \bar{b})$, donde $r \in K = R$

iv) $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$

v) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$

vi) Identidad de Lagrange: $|\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$

Demostraciones:

$$\text{ii) } \bar{a}x(\bar{b} + \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \bar{a}x\bar{b} + \bar{a}x\bar{c}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 &= (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) \\&= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times (\bar{a} \times \bar{b})) , \quad (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \\&= \bar{a} \cdot [(\bar{b} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{b}] , \quad \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} \\&= \|\bar{b}\|^2 \bar{a} \cdot \bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{b})(\bar{a} \cdot \bar{b}) \\&= \|\bar{b}\|^2 \|\bar{a}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2 \|\bar{a}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$$

vi) A partir de la identidad de Lagrange del álgebra básica para n variables:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \text{ para } n = 3, \text{ queda:}$$

$$\left(\sum_{k=1}^3 a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^3 b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^3 a_k b_k\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i)^2; \text{ lo cual llevado a la forma vectorial nos da:}$$

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Comentario. De la identidad de Lagrange se deduce:

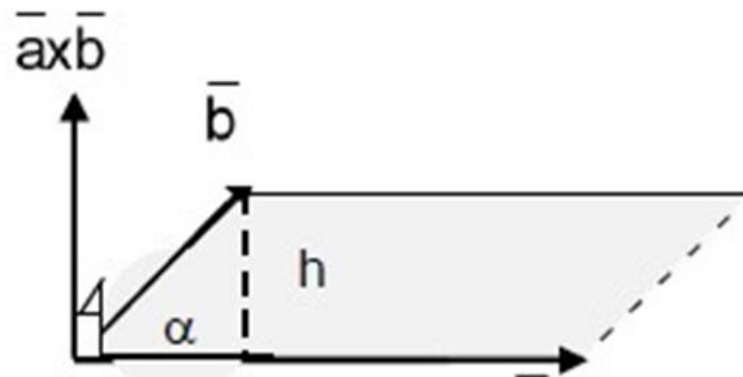
$$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (|\bar{a}| |\bar{b}| \cos \alpha)^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow |\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \alpha, \text{ donde } \alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Interpretación del producto vectorial.

Teorema. El área de un paralelogramo de lados \vec{a} y \vec{b} esta dado por : $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Demostración:



Se tiene que : Área = $|\vec{a}|h = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

El triple producto escalar de vectores en \mathbb{R}^3 . Dentro de las aplicaciones físicas y matemáticas muchas veces se presentan productos de vectores que tienen 3 o mas factores, siendo uno de ellos el llamado triple producto mixto.

Definición. Sean \vec{a} , \vec{b} y $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, se define el triple producto escalar de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} ; en ese orden, y se denota por $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$, como : $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Propiedades fundamentales.

$$\text{i) } [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{ii) } [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = [\bar{c} \ \bar{a} \ \bar{b}] = [\bar{b} \ \bar{c} \ \bar{a}]$$

$$\text{iii) } [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$

$$\text{iv) } [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \text{Comp}_{\bar{b} \times \bar{c}} \bar{a}$$

NOTAS.

1. Tres vectores \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} de R^3 son linealmente dependientes si y sólo si

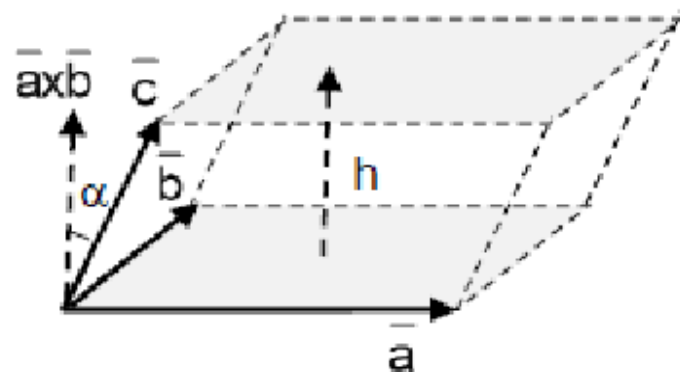
$$[\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$$

2. La dependencia lineal de tres vectores es equivalente a que los tres vectores sean paralelos a un mismo plano.

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Teorema. El volumen del paralelepípedo de lados \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} esta dado por : $V = |[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]|$.

Demostración:



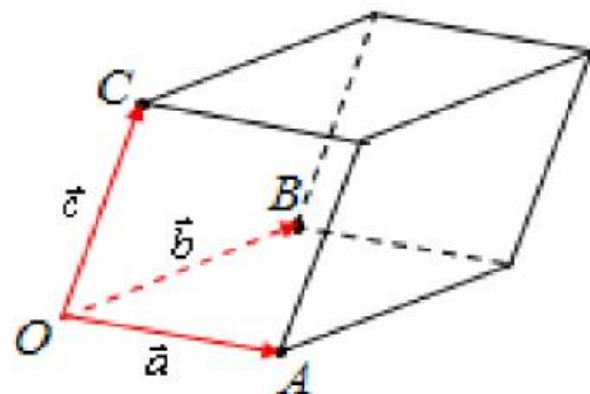
Tenemos : Volumen = $|\vec{a} \times \vec{b}| h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \alpha \dots (1)$

Pero $\cos \alpha = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}|}$, reemplazando en (1):

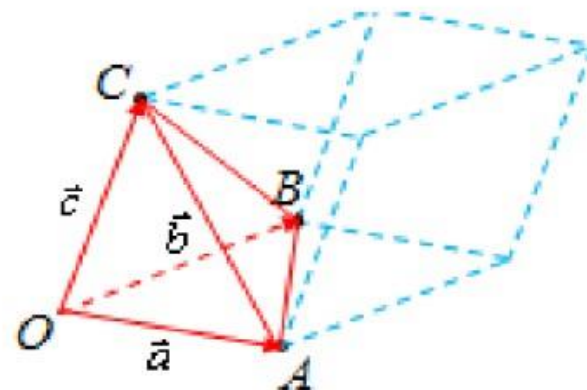
$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}| h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]|$$

Como consecuencia, la sexta parte de ese valor da el volumen del tetraedro determinado por esos mismos vectores. Esto es:

$$V_T = \frac{1}{6} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right| = \text{volumen del tetraedro determinado por los vectores } \vec{a}, \vec{b} \text{ y } \vec{c}.$$



Paralelepípedo



Tetraedro

Para el tetraedro, cuyo volumen es $V_T = \frac{1}{3} \cdot (\text{área de la base por la altura}) = \frac{1}{3} |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h$, y puesto que su base es la mitad que la del paralelepípedo, se tendrá que $V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h$.

Esto es, $V_T = \frac{1}{6} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|$.

**Se agradece su
atención**